OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1901. N° 4

RECHERCHES SUR UNE CLASSE DE SÉRIES INFINIES ANALOGUES A CELLES DE M. W. KAPTEYN

PAR

NIELS NIELSEN

Dans deux *Notes* qui sont publiées dans les *Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark*[1] j'ai trouvé la somme de cette série infinie

$$(a) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s J^{\mu}(sx)}{s^{\mu-2r}},$$

où x désigne une quantité réelle quelconque, tandis que r doit être un nombre entier choisi de façon que $\Re(\mu - 2r) > -\frac{1}{2}$. Un mémoire, qui paraîtra prochainement dans les *Annali di Matematica*, généralisera beaucoup les résultats ainsi obtenus en étudiant, à l'aide de la méthode appliquée dans la dernière des deux Notes susdites, une classe de séries qui procèdent d'après des fonctions plus générales que $J^{\mu}(x)$. Néanmoins, ces séries générales possèdent les mêmes propriétés fondamentales que (a), savoir de représenter des fonctions discontinues qui ont un *domaine d'invariabilité* où elles peuvent être constamment égales à zéro. Ces séries générales sont analogues à celles de feu M. Schlömilch[2].

[1] 1899, p. 661; 1900, p. 55.

[2] Zeitschrift für Mathematik und Physik. t. II, p. 155; 1858. Lommel: Studien über die Bessel'schen Functionen. p. 73; Leipzig 1868. Beltrami: Istituto Lombardo Rendiconti, 2e série, t. XIII, p. 410; 1880.

La présente communication est destinée à étudier l'application de la méthode mentionnée à une classe de séries infinies qui procèdent d'après des généralisations des deux fonctions bien connues:

$$\Psi^{\mu}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos(\mu\omega - x\sin\omega)\, d\omega,$$

$$\Omega^{\mu}(x) = \int_0^{\pi} \sin(\mu\omega - x\sin\omega)\, d\omega,$$

introduites dans la théorie des fonctions cylindriques par ANGER [1] et LOMMEL [2] respectivement. Les séries ainsi obtenues, généralisations de celles de M. W. KAPTEYN [3], représentent encore, comme les séries précédentes, des fonctions discontinues qui possèdent aussi un domaine d'invariabilité.

Du reste, nos séries en question se lient intimement à l'équation de KEPLER en nous donnant, à l'aide des fonctions $\Psi^{\mu}(x)$ et $\Omega^{\mu}(x)$, une solution nouvelle et très élégante de ce problème célèbre. Enfin, les mêmes séries nous fournissent un moyen simple pour développer en séries de puissances positives de x les fonctions $\Psi^{x}(\alpha x)$, $J^{x}(\alpha x) J^{-x}(\alpha x)$ et quelques autres analogues.

Remarquons en passant que la fonction de LOMMEL peut être exprimée généralement sous forme finie à l'aide de celle d'ANGER. Posons en effet, dans l'intégrale obtenue pour $\Psi^{-\mu}(x)$, $\pi - \omega$ au lieu de ω, nous obtiendrons

$$\Omega^{\mu}(x) = \frac{\pi}{\sin\mu\pi} \left(\Psi^{-\mu}(x) - \cos\mu\pi \cdot \Psi^{\mu}(x) \right),$$

formule qui appartient au fond à CAUCHY [4]; elle montre clairement que $\Omega^{\mu}(x)$ ne peut définir une fonction nouvelle que

[1] Comptes rendus, t. 39, p. 129; 1854. Untersuchungen über die Function I_k^h, p. 19; Danzig 1855.

[2] Mathematische Annalen, t. XVI, p. 187; 1880.

[3] Annales de l'École Normale 3e série, t. X; 1893.

[4] Comptes rendus, t. 39, p. 431; 1854.

dans le cas particulier où μ est égal à un entier. Dans ce cas, la fonction Ω joue un rôle assez considérable dans certaines recherches de MM. Rayleigh[1] et H.-F. Weber[2] sur la physique mathématique.

---

§ 1.

Avant de passer à nos recherches particulières, il nous semble utile de faire quelques observations préliminaires relatives à l'équation de Kepler, qui nous seront indispensables pour ce qui va suivre:

1°. *Supposons que μ, x, φ soient des quantités réelles de façon que $|\mu| \geqq |x|$, la racine réelle de cette équation transcendante:*

$$(\alpha) \qquad \mu\omega - x \sin \omega = \varphi$$

est une fonction univoque et continue de φ qui a une dérivée et qui va constamment en croissant ou en décroissant si nous faisons varier dans le même sens la quantité φ tandis que μ et x ont des valeurs fixes.

Démontrons tout d'abord que la valeur réelle de ω est une fonction univoque de φ; si cela n'a pas lieu, il existe deux valeurs différentes ω_1 et ω_2 qui satisfont à l'équation (α) pour une valeur fixe de φ; c'est-à-dire que nous aurons:

$$\mu(\omega_1 - \omega_2) = 2x \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2},$$

équation qui n'a pas de sens parce que l'on aura toujours:

$$(\beta) \qquad \left|\mu(\omega_1 - \omega_2)\right| > 2 \left| x \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right|.$$

Posons en outre:

$$\mu(\omega + \varepsilon) - x \sin(\omega + \varepsilon) = \varphi + \delta;$$

[1] Theory of Sound, t. II, p. 164; Londres 1896.

[2] Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang XXIV, p. 55; 1879.

nous aurons:

$$\mu\varepsilon - 2x \sin\frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos\left(\omega + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \delta,$$

ce qui montre, en vertu de (β), que les deux accroissements δ et ε auront le même signe ou non selon que μ sera positif ou négatif, c'est-à-dire que la fonction réelle ω n'a aucun maximum ni minimum.

Une démonstration analogue serait très désirable dans les cours élémentaires sur la théorie des fonctions cylindriques qui s'occupent de l'équation de KEPLER; cependant elle paraît ordinairement omise.

2°. *Pour résoudre généralement l'équation de* KEPLER

$$(\gamma) \qquad \omega - e \cdot \sin\omega = \varphi$$

il suffit de considérer le cas particulier où $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \pi$; *on suppose toujours* $-1 \leqq e \leqq +1$.

Désignons par $\omega(e, \varphi)$ la solution réelle de (γ) et supposons φ situé entre 0 et π, tandis que p désigne un nombre entier quelconque, nous aurons immédiatement:

$$\omega(e, \varphi - p\pi) = \omega[(-1)^p e, \varphi] + p\pi,$$

ce qui est suffisant pourvu que φ soit situé entre $\frac{\pi}{2}$ et π, sinon nous aurons:

$$\omega(e, \pi - \varphi) = \pi - \omega(-e, \varphi),$$

et voilà la démonstration complète de notre proposition.

§ 2.

Supposons maintenant que

$$f(\omega) = \Re(\omega) + i\Im(\omega)$$

soit une fonction imaginaire de la variable réelle ω, de façon que les deux intégrales

$$\int_0^{\mu\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}} \Re(\omega)\, d\omega, \quad \int_0^{\mu\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}} \Im(\omega)\, d\omega$$

puissent être décomposées en une somme des intégrales de Dirichlet. Cela posé, nous verrons tout d'abord que les deux fonctions:

$$F^{\mu}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\mu\omega - x\sin\omega)f(\omega)d\omega,$$

et:

$$G^{\mu}(x) = \int_0^{\pi}\sin(\mu\omega - x\sin\omega)f(\omega)d\omega$$

sont des fonctions entières par rapport à x comme par rapport à μ.

Remarquons que $F^{\mu}(x)$, $G^{\mu}(x)$ satisfont toutes les deux à la première équation fondamentale des fonctions cylindriques, savoir à l'équation

$$(\alpha) \qquad C^{\mu-1}(x) - C^{\mu+1}(x) = 2D_x C^{\mu}(x),$$

de sorte que $F^{\mu}(x)$ et $G^{\mu}(x)$ peuvent être développées en séries *neumanniennes* de première espèce, à l'aide de la méthode générale de M. Sonine[1].

Appliquons maintenant la formule élémentaire

$$\cos\omega - \cos 2\omega + \cos 3\omega - \ldots + (-1)^{n-1}\cos(n\omega)$$
$$= \frac{1}{2} - (-1)^n \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\omega}{2\cos\frac{1}{2}\omega};$$

nous aurons immédiatement:

$$(\beta) \qquad \sum_{s=1}^{s=n}(-1)^{s-1}F^{s\mu}(sx)$$

$$= \frac{1}{2}F^{0}(0) - \frac{(-1)^n}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}(\mu\omega - x\sin\omega)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(\mu\omega - x\sin\omega)\right)}f(\omega)d\omega.$$

Or, la substitution

$$\varphi = \mu\omega - x\sin\omega$$

[1] Mathematische Annalen, t. XVI, p. 5; 1880.

donnera pour l'intégrale définie qui figure au second membre de (β) cette autre expression:

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\mu\pi} \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{f(\omega)}{\mu - x\cos\omega}\, d\varphi.$$

Faisons ensuite croître au delà de toute limite le positif entier n; la proposition n° 1 du § 1 montre qu'il est possible d'appliquer la méthode que j'ai expliquée dans la dernière de mes Notes mentionnées dans l'Introduction[1]; nous aurons ainsi la formule générale:

$$(1) \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} F^{s\mu}(sx) = \frac{1}{2}F^0(0) - \frac{1}{|\mu|} \cdot \sum_{r=0}^{r=p}{}' \frac{f(\omega_r)}{1 - \frac{x}{\mu}\cos\omega_r},$$

où p est un entier choisi de façon que

$$(1_a) \qquad 2p+1 \leqq |\mu| < 2p+3,$$

et où l'accent placé après le signe Σ indique qu'il faut prendre la moitié du terme qui correspond à $r = p$, pourvu que $|\mu|$ soit égal à $2p+1$; ω_r désigne toujours la racine réelle de cette équation de KEPLER:

$$(1_b) \qquad \omega_r - \frac{x}{\mu}\sin\omega_r = \frac{(2r+1)\pi}{|\mu|}.$$

Dans le cas particulier $-1 < \mu < +1$, la somme figurant au second membre de (1) *doit être supprimée de façon que la somme de la série infinie est constamment égale à $\frac{1}{2}F^0(0)$, indépendante à la fois de x et de μ. On suppose toujours $|\mu| \geqq |x|$.*

Considérons quelques cas particuliers de notre formule générale (1):

1°. $f(\omega) = 1$,

nous aurons cette formule remarquable:

[1] Bulletins 1900, p. 56.

$$(2)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\,\Psi^{s\mu}(sx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{|\mu|}\cdot\sum_{r=0}^{r=p}{}' \frac{1}{1-\frac{x}{\mu}\cos\omega_r}.$$

2^0. $f(\omega) = 1 - \frac{x}{\mu}\cos\omega,$

ce qui donnera cette formule bien connue:

$$(3)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\cdot\sin(s\mu\pi) = \frac{\mu\pi}{2} - \operatorname{sgn}\mu\cdot\pi(p+\varepsilon_\mu),$$

où ε_μ est égal à 1 généralement, à l'exclusion du cas $|\mu| = 2p+1$, où il faut mettre $\varepsilon_\mu = \frac{1}{2}$.

Supposons que $f(\omega)$ ait une dérivée, la formule (1) peut être simplifiée en introduisant cette fonction nouvelle:

$$\mathfrak{F}^\mu(x) = \int_0^\pi \sin(\mu\omega - x\sin\omega)\,g'(\omega)\,d\omega,$$

où l'on a admis:

$$f(\omega) = \left(1 - \frac{x}{\mu}\cos\omega\right)g(\omega).$$

Cela posé, une intégration par parties donnera immédiatement, pourvu que $f(\omega)$ ne devienne pas infini dans l'intervalle $0 \leqq \omega \leqq +\pi$:

$$F^\mu(x) = \frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}\,g(\pi) - \frac{1}{\mu\pi}\,\mathfrak{F}^\mu(x),$$

de sorte que (1) peut s'écrire, en vertu de (3), sous cette forme nouvelle:

$$(4)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\cdot\mathfrak{F}^{s\mu}(sx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi(\mu\omega - x\sin\omega)\,g'(\omega)\,d\omega + \operatorname{sgn}\mu\cdot\pi\sum_{r=0}^{r=p}{}'\Big(g(\omega_r) - g(\pi)\Big).$$

Posons particulièrement $g(\omega) = \omega$, nous avons:

$$(5)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\,\Omega^{s\mu}(sx) = \frac{\pi^2\mu}{4} - x + \operatorname{sgn}\mu\cdot\pi\sum_{r=0}^{r=p}{}'(\omega_r - \pi),$$

formule qui se présente sous une forme élégante dans le cas $\mu = 1$, ce qui donnera $\omega_0 = \pi$.

§ 3.

La formule élémentaire

$$\cos\omega + \cos 2\omega + \cos 3\omega + \ldots + \cos n\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\omega}{2\sin\frac{1}{2}\omega}$$

donnera de la même manière cette autre formule générale:

$$(6)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} F^{s\mu}(sx) = -\frac{1}{2}F^0(0) + \frac{1}{|\mu|}\cdot\sum_{r=0}^{r=p}{}' \frac{f(\omega_r')}{1-\frac{x}{\mu}\cos\omega_r'}$$

où l'entier non négatif p *est choisi de façon que*

$$(6_a)\qquad 2p \leqq |\mu| < 2p+2,$$

et où l'accent placé après le signe Σ *indique qu'il faut prendre toujours la moitié du terme qui correspond à* $r=0$ *et aussi de celui qui correspond à* $r=p$, *pourvu que* $|\mu| = 2p$; ω_r' *désigne dans ce cas la racine réelle de cette équation keplérienne:*

$$(6_b)\qquad \omega_r' - \frac{x}{\mu}\sin\omega_r' = \frac{2r\pi}{|\mu|}, \qquad |\mu| \geqq |x|.$$

La fonction discontinue définie par la série infinie qui figure au premier membre de (6) ne possède pas généralement un domaine d'invariabilité.

Les cas particuliers considérés au § 2 donneront ici ces deux formules:

$$(7)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \psi^{s\mu}(sx) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{|\mu|}\cdot\sum_{r=0}^{r=p}{}' \frac{1}{1-\frac{x}{\mu}\cos\omega_r'},$$

$$(8)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\sin(s\mu\pi)}{s} = -\frac{\mu\pi}{2} + \operatorname{sgn}\mu\cdot\pi(p+\varepsilon_\mu);$$

dans (8) le nombre ε_μ est égal à $\frac{1}{2}$ à l'exception du cas particulier $|\mu| = 2p$ où il faut prendre $\varepsilon_\mu = 0$.

Introduisons dans (6) la fonction $\mathfrak{F}^{\mu}(x)$: nous aurons, en vertu de (8), cette autre formule générale:

$$(9) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}{}' \frac{\mathfrak{F}^{s\mu}(sx)}{s}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (\mu\omega - x\sin\omega)\, g'(\omega)\, d\omega + \operatorname{sgn}\mu\cdot\pi \sum_{r=0}^{r=p}{}' \Big(g(\pi) - g(\omega_r')\Big),$$

d'où, en posant $g(\omega) = \omega$:

$$(10) \quad \sum_{s=1}^{s=\infty}{}' \frac{\Omega^{s\mu}(sx)}{s} = -\frac{\pi^2\mu}{4} + x + \operatorname{sgn}\mu\cdot\pi \sum_{r=0}^{r=p}{}' (\pi - \omega_r'),$$

formule qui se présente sous une forme élégante dans les cas particuliers $\mu = 1$, $\mu = 2$.

§ 4.

Appliquons encore la formule élémentaire

$$\sin\omega - \sin 3\omega + \sin 5\omega - \ldots + (-1)^n \sin(2n+1)\,\omega = (-1)^n \frac{\sin(2n+2)\,\omega}{2\cos\omega};$$

nous aurons de même la formule générale

$$(11) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' (-1)^s G^{(2s+1)\mu}\Big((2s+1)\,x\Big) = \frac{\pi}{2\mu}\cdot \sum_{r=0}^{r=p}{}' \frac{(-1)^r f(\omega_r'')}{1 - \frac{x}{\mu}\cos\omega_r''},$$

où l'accent placé après le signe Σ *a la même signification que dans* (1) *et où* p *est un positif entier choisi de façon que*

$$(11_a) \qquad 2p+1 \leqq |2\mu| < 2p+3,$$

tandis que ω_r'' *désigne la racine réelle de l'équation keplérienne:*

$$(11_b) \qquad \omega_r'' - \frac{x}{\mu}\sin\omega_r'' = \frac{(2r+1)\,\pi}{|2\mu|}.$$

Dans le cas particulier $-\frac{1}{2} < \mu < +\frac{1}{2}$, *la somme de la série infinie qui figure au premier membre de* (11) *a constamment la valeur zéro. On suppose toujours* $|\mu| \geqq |x|$.

Les deux cas particuliers habituels donneront ici ces deux formules:

$$(12)\quad \sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\Omega^{(2s+1)\mu}((2s+1)x) = \frac{\pi}{2\mu}\cdot\sum_{r=0}^{r=p}{}' \frac{(-1)^r}{1-\frac{x}{\mu}\cos\omega_r''},$$

$$(13)\quad \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\cos(2s+1)\mu\pi = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{r=0}^{r=p}{}'\cos(r\pi).$$

En introduisant encore dans (11) au lieu de $G^\mu(x)$ cette autre fonction nouvelle

$$\mathfrak{G}^\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\mu\omega - x\sin\omega)\, g'(\omega)\, d\omega,$$

on aura, en vertu de (13), cette autre formule générale:

$$(14)\quad \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\mathfrak{G}^{(2s+1)\mu}\Big((2s+1)x\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(g(\pi)-g(0)\Big)-\frac{1}{2}\cdot\sum_{r=0}^{r=p}{}'(-1^r)\Big(g(\omega_r'')-g(\pi)\Big),$$

ce qui montre que *la fonction discontinue définie par la série infinie qui figure au premier membre de* (14) *possède encore un domaine d'invariabilité dans l'intervalle* $-\frac{1}{2}<\mu<+\frac{1}{2}$.

Dans le cas particulier $g(\omega)=\omega$, nous aurons cette formule intéressante:

$$(15)\quad \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\Psi^{(2s+1)\mu}((2s+1)x) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{r=p}{}'(-1)^r(\omega_r''-\pi),$$

de sorte que dans l'intervalle $-\frac{1}{2}<\mu<+\frac{1}{2}$ la somme de notre série infinie est égale à $\frac{\pi}{4}$.

§ 5.

Remarquons que la fonction d'ANGER $\Psi^n(x)$, où n est égal à un entier, deviendra identique à la fonction cylindrique de première espèce $J^n(x)$; les formules (2), (7), (15) donneront respectivement, si nous posons nx au lieu de x:

$$(16)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}J^{ns}(nsx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot\sum_{r=0}^{r=p}{}' \frac{1}{1-x\cos\omega_r},$$

$$(16_{\mathrm{a}})\quad \sum_{s=1}^{s=\infty} J^{ns}(nsx) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\cdot\sum_{r=0}^{r=p}{}' \frac{1}{1-x\cos\omega_r'},$$

$$(16_{\mathrm{b}})\quad \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1} J^{n(2s+1)}(n(2s+1)x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{r=p}{}'(-1)^r(\omega_r''-\pi),$$

formules qui sont valables toutes les trois dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, tandis que nous avons posé respectivement:

$$(\alpha).\qquad \omega_r - x\sin\omega_r = \frac{(2r+1)\pi}{n},$$

$$(\beta)\qquad \omega_r' - x\sin\omega_r' = \frac{2r\pi}{n},$$

$$(\gamma)\qquad \omega_r'' - x\sin\omega_r'' = \frac{(2r+1)\pi}{2n}.$$

La plus célèbre des formules particulières (16) est celle qui peut être déduite de (16_{a}) en y posant $n = 1$, savoir la formule

$$(17)\qquad \frac{1}{1-x} = 1 + 2\sum_{s=1}^{s=\infty} J^{s}(sx),$$

qui a suggéré à M. Kapteyn[1] l'idée fondamentale de ses séries générales de fonctions cylindriques.

Nous n'avons démontré les formules (16), (17) que dans le cas particulier où x est une quantité réelle située entre les limites $+1$ et -1. Cependant, M. Kapteyn[2] a démontré que les séries infinies en question possèdent la propriété remarquable d'être absolument convergentes aussi pour les valeurs imagi-

[1] Annales de l'École Normale, 3e série, t. X, p. 96; 1893.
[2] loc. cit. p. 122.

naires de x dont le module est plus petit que K, où K désigne la racine positive de l'équation transcendante

$$\frac{\alpha}{2} e^{1+\frac{\alpha^2}{4}} = 1,$$

ou bien, d'après M. KAPTEYN[1]:

$$K = 0{,}659\ldots$$

Dans ce qui suit nous désignons toujours ce nombre K comme le *rayon kapteynien.*

On verra aisément que les formules (16) ne sont autre chose que des conséquences immédiates de la résolution célèbre de l'équation *keplérienne*

$$\omega - x \sin \omega = \varphi \tag{18}$$

due à BESSEL[2]. Pour reconnaître la vérité de cette assertion, il suffit de considérer ces deux développements en séries de FOURIER:

$$\frac{1}{1 - x \cos \omega} = 1 + 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} J^s(sx) \cos(s\varphi), \tag{δ}$$

$$\omega = \varphi + 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} J^s(sx) \sin(s\varphi), \tag{ε}$$

qui sont valables toutes les deux dans les intervalles $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$. Pour en déduire les formules (16) il suffit d'introduire dans (δ), (ε) les angles figurant aux seconds membres de (α), (β), (γ) et d'ajouter ensuite les équations ainsi obtenues.

On peut de la même manière obtenir les formules déduites de (1), (6), (11), dans les cas particuliers où μ est égal à un

[1] loc. cit. p. 120.

[2] Abhandlungen der Berliner Akademie a. d. Jahre 1824 (publié 1826). Voir aussi les traités suivants sur les fonctions cylindriques:
Todhunter: Laplace's Lamè's and Bessel's functions, p. 342; Londres 1875.
Gray and Matthews: Treatise on Bessel functions, p. 4; Londres 1895.
Graf und Gubler: Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen, p. 17; Berne 1898—1900.

nombre entier et où la fonction $f(\omega)$ est supposée paire ou impaire.

Inversement, démontrons maintenant que les formules générales déduites dans les paragraphes précédents nous fournissent un moyen simple pour résoudre l'équation *keplérienne* (18), où il suffit de supposer l'angle φ situé entre les deux limites $\frac{\pi}{2}$ et π. A cet égard posons:

$$\mu = \frac{\pi}{\varphi}, \quad x = \frac{\pi e}{\varphi}, \quad \text{d'où: } 1 < \mu < 2;$$

nous aurons, en vertu de (4):

$$g(\omega) = g(\pi) - \frac{1}{2\varphi} \cdot \int_0^\pi (\sigma - e \sin\sigma)\, g'(\sigma)\, d\sigma \tag{19}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \mathfrak{F}^{\frac{s\pi}{\varphi}}\left(\frac{se\pi}{\varphi}\right);$$

les hypothèses

$$\mu = \frac{\pi}{2\varphi}, \quad x = \frac{\pi e}{2\varphi}, \quad \text{d'où } \tfrac{1}{2} < \mu < 1,$$

donneront de même, en vertu de (14):

$$g(\omega) = \tfrac{3}{2} g(\pi) - \tfrac{1}{2} g(o) - 2 \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \mathfrak{G}^{\frac{2s+1}{2\varphi}}\left(\frac{2s+1}{2\varphi} \cdot \pi e\right). \tag{20}$$

Posant particulièrement $g(\omega) = \omega$, on aura respectivement ces deux formules:

$$\omega = \pi + \frac{4e - \pi^2}{4\varphi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \Omega^{\frac{s\pi}{\varphi}}\left(\frac{se\pi}{\varphi}\right), \tag{21}$$

$$\omega = \frac{3\pi}{2} - 2 \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \Psi^{\frac{2s+1}{\varphi}}\left(\frac{2s+1}{\varphi} \cdot \pi e\right). \tag{22}$$

Il est très remarquable, ce me semble, que les fonctions d'Anger et de Lommel nous permettent de *réunir dans une* *seule fonction les deux variables indépendantes* e *et* φ, tandis que dans la résolution de BESSEL ces deux variables se présentent séparées, e figurant dans les fonctions cylindriques et φ dans les sinus de la série de FOURIER.

§ 6.

Dans les paragraphes précédents nous n'avons étudié que des cas très particuliers d'une classe générale de séries infinies. En effet, la sommation des deux séries générales

$$(\alpha) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s F^{s\mu}(sx), \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} b_s G^{s\mu}(sx)$$

peut être effectuée à l'aide des sommes des deux séries de FOURIER correspondantes

$$(\beta) \qquad \Sigma a_s \cos(s\omega), \qquad \Sigma b_s \sin(s\omega).$$

Cependant, les résultats ainsi obtenus se présentent généralement sous une forme assez compliquée, même dans les cas particuliers

$$-1 < \mu < +1,$$
$$0 < \mu < 2,$$
$$-\tfrac{1}{2} < \mu < +\tfrac{1}{2}.$$

En somme, les trois séries infinies figurant dans les formules (1), (6), (11) semblent se distinguer particulièrement, en comparaison avec les autres séries (α), par la propriété singulière que la somme d'une telle série particulière peut être exprimée sous forme finie à l'aide de la fonction $f(\omega)$ sans l'introduction des intégrales définies, ce qui a lieu généralement pour les autres séries de la forme (α). Néanmoins, quelques cas particuliers des séries en question peuvent nous donner des formules intéressantes contenant les fonctions susdites.

Mentionnons par exemple les séries de FOURIER dont les sommes représentent les fonctions de JACQUES BERNOULLI.

Nous verrons aisément que les sommes des séries analogues mais plus générales contenant les fonctions $F^{\mu}(x)$, $G^{\mu}(x)$ représentent aussi des polynomes entiers et par rapport à x et par rapport à μ. De cette manière, on peut démontrer sans peine les deux formules suivantes que j'ai communiquées récemment dans mes recherches sur les séries *kapteyniennes* générales [1]:

$$(23)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{J^{2s}(2sx)}{(2s)^{2n}} = \sum_{p=0}^{p=n} A_{2p}^{2n} x^{2p} = p^{2n}(x),$$

$$(24)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{J^{2s+1}((2s+1)x)}{(2s+1)^{2n}} = \sum_{p=0}^{p=n} A_{2p+1}^{2n} x^{2p+1} = p^{2n+1}(x),$$

où n désigne un positif entier et où l'on a posé pour abréger:

$$(23_a)\qquad A_{2p}^{2n} = \frac{(-1)^p}{(2p)!} \cdot \sum_{s=1}^{s=p} \frac{(-1)^{s-1}\binom{2p}{p-s}}{(2s)^{2n-2p}},$$

$$(24_a)\qquad A_{2p+1}^{2n} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s\binom{2p+1}{p-s}}{(2s+1)^{2n-2p+1}};$$

les formules (23), (24) sont valables aussi pour les valeurs imaginaires de x dont le module est plus petit que le rayon *kapteynien.*

Appliquons maintenant ces deux formules élémentaires:

$$\cos(\mu\varphi) = \frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}\left(1 - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mu^2}{s^2-\mu^2}\cos(s\varphi)\right),$$

$$\sin(\mu\varphi) = \frac{2\sin\mu\pi}{\mu\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s\mu}{s^2-\mu^2}\sin(s\varphi),$$

valables dans l'intervalle $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$, les limites exclues pour la dernière série; nous aurons, en posant

[1] Annales de l'École Normale, 3^e série, t. XVIII, p. 46; 1901.

$$\omega - x \sin \omega = \varphi, \quad |x| < 1,$$

ces deux formules particulières:

$$(25) \qquad \Psi^{\mu}(\mu x) = \frac{\sin \mu\pi}{\mu\pi}\left(1 - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mu^2}{s^2 - \mu^2} J^s(sx)\right),$$

$$(26) \qquad \Omega^{\mu}(\mu x) = \frac{2 \sin \mu\pi}{\mu\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s\mu}{s^2 - \mu^2} \Omega^s(sx).$$

Introduisons maintenant ces deux fonctions nouvelles:

$$(\gamma) \quad \Pi^{\mu}(x) = \frac{1}{2}\left(\Psi^{\mu}(x) + \Psi^{-\mu}(x)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin \omega) \cos(\mu\omega)\, d\omega,$$

$$(\delta) \quad X^{\mu}(x) = \frac{1}{2}\left(\Psi^{\mu}(x) - \Psi^{-\mu}(x)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin \omega) \sin(\mu\omega)\, d\omega,$$

nous aurons, en vertu de (25), ces autres formules:

$$(27) \qquad \Pi^{\mu}\left(\mu x\right) = \frac{\sin \mu\pi}{\mu\pi}\left(1 - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mu^2}{4s^2 - \mu^2} J^{2s}(2sx)\right),$$

$$(28) \qquad X^{\mu}\left(\mu x\right) = \frac{2 \sin \mu\pi}{\pi} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mu}{(2s+1)^2 - \mu^2} J^{2s+1}((2s+1)x);$$

appliquons la formule de CAUCHY mentionnée dans l'Introduction, la formule (25) donnera ce développement remarquable:

$$(29) \qquad \Omega^1(x) = 1 - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{4s^2 - 1} J^{2s}(2sx).$$

Les trois dernières formules sont valables aussi pour les valeurs imaginaires de x dont le module est plus petit que le rayon *kapteynien*; elles nous présentent des exemples nouveaux des séries *kapteyniennes* de première espèce. Les formules (27), (28) donneront encore, en vertu de (23), (24), ces deux remarquables développements en séries de puissances:

$$(30)\quad \Pi^x(\alpha x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}\left(1 - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} p^{2s}(\alpha)x^{2s}\right), \quad |x| < 2,$$

$$(31)\quad X^x(\alpha x) = \frac{2 \sin \pi x}{\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty} p^{2s+1}(\alpha)\,x^{2s+1}, \quad |x| < 1,$$

valables pourvu que $|\alpha|$ soit plus petit que le rayon *kapteynien.*

§ 7.

Il est très remarquable qu'il soit possible de désigner sous une forme finie la somme des séries infinies particulières formées de celles étudiées au § 6, en y remplaçant les fonctions cylindriques par des produits de deux telles fonctions. Pour approfondir cette question, il suffit de prendre pour point de départ cette formule:

$$J^{\frac{n+\mu}{2}}(x)\,J^{\frac{n-\mu}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^n(2x\cos\varphi)\cos(\mu\varphi)\,d\varphi,$$

où n désigne un positif entier tandis que μ est une quantité finie quelconque.

En premier lieu, nous aurons immédiatement, en vertu de (23), (24) ces deux formules analogues:

$$(32)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{J^{s+\frac{\mu}{2}}(2\,sx)\,J^{s-\frac{\mu}{2}}(2\,sx)}{(2\,s)^{2n}} = q^{\mu,\,2n}(x),$$

$$(33)\quad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{J^{s+\frac{1+\mu}{2}}((2s+1)x)\,J^{s+\frac{1-\mu}{2}}((2s+1)x)}{(2s+1)^{2n}} = q^{\mu,\,2n+1}(x),$$

où l'on a posé

$$(34)\quad q^{\mu,\,n}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} p^n(2x\cos\varphi)\cos(\mu\varphi)\,d\varphi;$$

c'est-à-dire que notre polynome $q^{\mu, n}(x)$ peut être formé de $p^n(x)$ si on y remplace le coefficient A_p^{2n} par cet autre:

$$(34_a) \qquad \mathfrak{A}_p^{2n} = \frac{p!\, A_p^{2n}}{\Gamma\left(1+\frac{p+\mu}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{p-\mu}{2}\right)}.$$

Dans le cas particulier $\mu = 0$, nous écrivons simplement $q^n(x)$ au lieu de $q^{0, n}(x)$. Les deux formules (32), (33) sont valables également pour les valeurs imaginaires de x dont le module est plus petit que la moitié du rayon *kapteynien*; du reste, elles peuvent être démontrées aussi à l'aide de la théorie générale des séries *kapteyniennes*[1].

Pour étudier les séries de produits de deux fonctions cylindriques de même forme que (27), (28), (30), (31), appliquons ces deux intégrales:

$$J^{\frac{\mu}{2}}(x)\, J^{-\frac{\mu}{2}}(x) = \frac{2}{\pi \cos \frac{\mu\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Pi^{\mu}(2x\cos\varphi)\, d\varphi\,,$$

$$J^{\frac{1+\mu}{2}}(x)\, J^{\frac{1-\mu}{2}}(x) = \frac{2}{\pi \sin \frac{\mu\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} X^{\mu}(2x\cos\varphi) \cos\varphi\, d\varphi,$$

obtenues de (γ) en y introduisant les expressions intégrales pour $J^0(x)$, $J^1(x)$ respectivement, d'où nous obtiendrons, en vertu de (27), (28):

$$(35) \qquad J^{\frac{\mu}{2}}(\mu x) J^{-\frac{\mu}{2}}(\mu x) = \frac{2\sin\frac{\mu\pi}{2}}{\mu\pi}\left(1 - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mu^2}{4s^2-\mu^2} (J^s(2sx))^2\right),$$

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} & J^{\frac{1+\mu}{2}}(\mu x) J^{\frac{1-\mu}{2}}(\mu x) = \\ & = \frac{4\cos\frac{\mu\pi}{2}}{\mu\pi} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mu^2}{(2s+1)^2-\mu^2} J^s((2s+1)x)\, J^{s+1}((2s+1)x); \end{aligned} \right.$$

posons dans la première de ces formules $\mu = 1$, nous obtien-

[1] loc. cit. p. 52

drons le développement remarquable:

$$(37)\qquad \frac{\sin 2x}{2x} = 1 - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{4s^2-1}(J^s(2sx))^2.$$

Ces trois dernières formules nous présentent des exemples nouveaux et intéressants des séries *kapteyniennes* de deuxième espèce; elles sont valables toutes les trois aussi pour les valeurs imaginaires de x dont le module est plus petit que la moitié du rayon *kapteynien.* Appliquons encore les formules (30), (31), nous aurons ces deux séries de puissances singulières:

$$(38)\quad J^{\frac{x}{2}}(\alpha x)J^{-\frac{x}{2}}(\alpha x) = \frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\left(1 - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} q^{2s}(\alpha)x^{2s}\right),\quad |x| < 2,$$

$$(39)\quad J^{\frac{1+x}{2}}(\alpha x)J^{\frac{1-x}{2}}(\alpha x) = \frac{4\cos\frac{\pi x}{2}}{\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} q^{2s+1}(\alpha)x^{2s+1},\quad |x| < 1,$$

valables pourvu que α soit plus petit que la moitié du rayon *kapteynien.*

Posons dans (38) $\alpha = \frac{1}{4}$, ce qui est permis, et mettons $2x$ au lieu de x, nous obtiendrons cette formule très remarquable:

$$(40)\quad J^x\left(\frac{x}{2}\right)J^{-x}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}\left(1 - 2\sum_{s=1}^{s=\infty} q^{2s}(\tfrac{1}{4})\cdot(2x)^{2s}\right),\quad |x| < 1,$$

§ 8.

Mentionnons encore quelques formules récursives obtenues pour les polynomes $p^n(x)$, $q^n(x)$. Posons pour abréger $p_n^{(r)}$ au lieu de $\frac{d^r p^n(x)}{dx^r}$; nous aurons, en vertu de (23) et (24) et en appliquant l'équation différentielle à laquelle la fonction cylindrique $J^n(x)$ doit satisfaire, cette équation pour les polynomes p:

$$p_n'' + \frac{1}{x} p_n' = \frac{1}{x^2} p_{n-2} - p_{n-2}, \quad n < 1, \tag{41}$$

de sorte que la formule déduite de (34) en y posant $\mu = 0$ donnera sans peine cette équation analogue pour $q^n(x)$:

$$q_n''' + \frac{3}{x} q_n'' + \frac{1}{x^2} q_n = \left(\frac{1}{x^2} - 4 \right) q_{n-2} - \frac{4}{x} q_{n-2}, \quad n < 1. \tag{42}$$

L'analogie frappante entre les deux formules (41), (42) nous suggère naturellement l'idée de chercher pour le produit de deux fonctions cylindriques une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur, problème qui a été seulement effleuré par feu M. MEISSEL[1] et cela dans le cas le plus simple où les paramètres des fonctions cylindriques sont tous les deux égaux à zéro. J'ai démontré que le produit de deux fonctions cylindriques quelconques du même argument satisfait généralement à une équation différentielle linéaire très simple de quatrième ordre. Dans le cas particulier où les paramètres sont égaux, abstraction faite du signe, l'ordre de notre équation se réduit à 3. Cependant, une discussion complète de ce problème nous entraînerait ici beaucoup trop loin, de façon que nous devons nous borner à renvoyer le lecteur à une note qui paraîtra dans les *Nouvelles Annales*.

Copenhague, le 13 avril 1901.

---

[1] Gewerbschulprogramm, Iserlohn 1862. Voir aussi: Jahres-Bericht über die Ober-Realschule in Kiel, 1890.